

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc103941962)

[1 Производные 5](#_Toc103941963)

[1.1 Понятие производной 5](#_Toc103941964)

[1.2 Геометрический смысл производной 6](#_Toc103941965)

[1.3 Правила дифференцирования 7](#_Toc103941966)

[1.4 Производные высших порядков 8](#_Toc103941967)

[1.4.1 Дифференциал функции 9](#_Toc103941968)

[1.4.2 Производные и дифференциалы высших порядков 10](#_Toc103941969)

[1.4.3 Производная функции, заданной параметрически 11](#_Toc103941970)

[1.4.4 Производные неявной функции. 13](#_Toc103941971)

[1.4.5 Частные производные 13](#_Toc103941972)

[1.4.6 Производная сложной функции двух переменных 14](#_Toc103941973)

[1.5 Задачи по теме «Производные» 14](#_Toc103941974)

[2 Интегралы 26](#_Toc103941975)

[2.1 Неопределенный интеграл 26](#_Toc103941976)

[2.1.1 Основные понятия и определения 26](#_Toc103941977)

[2.1.2 Свойства неопределенного интеграла 26](#_Toc103941978)

[2.1.3 Методы вычисления нопределённых интегралов 27](#_Toc103941979)

[2.2 Определенный интеграл 29](#_Toc103941980)

[2.2.1 Основные понятия и определения 29](#_Toc103941981)

[2.2.2 Свойства определенного интеграла 30](#_Toc103941982)

[2.3 Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметров 31](#_Toc103941983)

[2.4 Задачи по теме «Интегралы» 32](#_Toc103941984)

[2.5 Задачи из олимпиад Московского Политеха 37](#_Toc103941985)

[3 Дифференциальные уравнения 41](#_Toc103941986)

[3.1 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами 41](#_Toc103941987)

[3.2 Задача Коши 45](#_Toc103941988)

[3.3 Теорема Ролля 46](#_Toc103941989)

[3.4 Дифференциальные уравнения 46](#_Toc103941990)

[3.5 Задачи по теме «Дифференциальные уравнения» 49](#_Toc103941991)

[3.6 Задачи из олимпиад Московского Политеха 57](#_Toc103941992)

[4 Ряды 62](#_Toc103941993)

[4.1 Основные понятия и термины 62](#_Toc103941994)

[4.2 Задачи по теме «Ряды» 63](#_Toc103941995)

[5 Комбинаторика и теория вероятности 66](#_Toc103941996)

[5.1 Основные понятия и термины 66](#_Toc103941997)

[5.1.1 Теория вероятности. 67](#_Toc103941998)

[5.1.2 Комбинаторика 68](#_Toc103941999)

[5.2 Задачи по теме «Комбинаторика и теория вероятности» 68](#_Toc103942000)

[6 Линейная алгебра 90](#_Toc103942001)

[6.1 Основные понятия и термины 90](#_Toc103942002)

[6.2 Задачи по теме «Линейная алгебра» 91](#_Toc103942003)

[7 Пределы 94](#_Toc103942004)

[7.1 Основные понятия и определения 94](#_Toc103942005)

[7.1 Задачи по теме «Пределы» 97](#_Toc103942006)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 100](#_Toc103942007)

# ВВЕДЕНИЕ

Данная проектная работа, являющаяся пособием для подготовки к олимпиаде по высшей математике, предназначена для студентов, желающих подготовиться к участию в олимпиадах, а также несёт роль справочника для решения различных задач, где собраны некоторые из задач, встречающихся в олимпиадах.

В пособии рассматривались такие темы как: производные, интегралы, дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятности и комбинаторика. В каждом разделе справочника предоставлена необходимая теоретическая составляющая и некоторые из олимпиадных заданий различных олимпиад по высшей математике. К каждой задаче представлено её решение для более полного раскрытия темы, сверки правильности решения и ознакомлением с нюансами различных решений.

# 1 Производные

1.1 Понятие производной

Производной функции y=f(x) в данной точке х0 называют предел отношения приращения функции к соответствующему приращению его аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

Дифференцированием называют операцию нахождения производной.

Тот процесс, с помощью которого из данной функции *f(x)* получают новую функцию *f ' (x)*, называют *дифференцированием* и состоит он из следующих трех шагов:

1) даем аргументу *x* приращение *x* и определяем соответствующее приращение функции

*y = f(x+x) -f(x)*;

2) составляем отношение



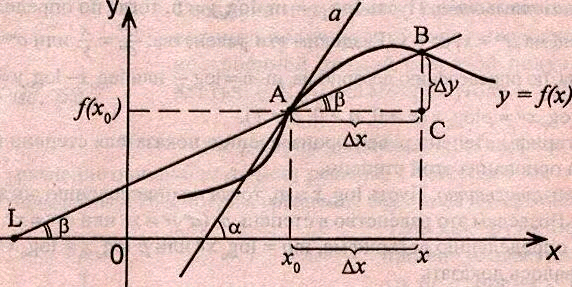
3) считая *x* постоянным, а *x* 🠢0, находим

,

который обозначаем через *f ' (x)*, как бы подчеркивая тем самым, что полученная функция зависит лишь от того значения *x*, при котором мы переходим к пределу.

1.2 Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции у = f (х), дифференцируемой в окрест­ностях точки x0



***f(x)***

Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку гра­фика функции - точку А(x0, f (х0)) и пересекающую график в некоторой точке B(x;f(x)). Такая прямая (АВ) называется секущей. Из ∆АВС: АС = ∆x; ВС =∆у; tgβ=∆y/∆x .

Так как АС || Ox, то ∠ALO = ∠BAC = β (как соответственные при параллельных). Но ∠ALO — это угол наклона секущей АВ к положи­тельному направлению оси Ох. Значит, tgβ = k - угловой коэффициент прямой АВ.

Теперь будем уменьшать ∆х, т.е. ∆х→ 0. При этом точка В будет прибли­жаться к точке А по графику, а секущая АВ будет поворачиваться. Пре­дельным положением секущей АВ при ∆х→ 0 будет прямая (a), называемая касательной к графику функции у = f (х) в точке А.

Если перейти к пределу при ∆х → 0 в равенстве tgβ =∆y/∆x, то получим

 или tgα =f '(x0),

так как  α-угол накло­на касательной к положительному направлению оси Ох

,

по определению производной. Но tgα = k - угловой коэффициент каса­тельной, значит,

k = tgα = f '(x0).

Итак, геометрический смысл производной заключается в следую­щем:

Производная функции в точке x0 равна угловому коэффициенту ка­сательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x0.

1.3 Правила дифференцирования

|  |  |
| --- | --- |
| (C)’= 0 С=const |  |
|  |  |
| (cos x)'=-sin x |  |
| (sin x)'=cos x |  |
| (tg x)'= | (ах)'=аx ln a |
| (ctg x)'=- | (ех)'=ex |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Производная степенно-показательной функции

, где .

.

Логарифмическое дифференцирование. Пусть дана функция . При этом предполагается, что функция  не обращается в нуль в точке . Покажем один из способов нахождения производной функции , если  очень сложная функция и по обычным правилам диф­фе­рен­цирования найти производную затруднительно.

Так как по первоначальному предположению  не равна нулю в точке, где ищется ее производная, то найдем новую функцию  и вычислим ее производную

 (1)

Отношение  называется логарифмической производной функции . Из формулы (1) получаем

. Или 

Формула (2) дает простой способ нахождения производной функции .

1.4 Производные высших порядков

Ясно, что производнаяфункции *y =f (x)* есть также функция от *x*: 

  Если функция *f ' (x)* дифференцируема, то её производная обозначается символом *y'' =f '' (x)* и называется второй производной функции f(x) или производной функции f(x) второго порядка. Пользуясь обозначением можем написать

.

  Очень удобно пользоваться также обозначением , указывающим, что функция *y=f(x)* была продифференцирована по *x* два раза.

Производная второй производной, т.е. функции *y''=f '' (x)* , называется третьей производной функции y=f(x) или производной функции f(x) третьего порядка и обозначается символами

.

  Вообще *n*-я производная или производная *n*-го порядка функции *y=f(x)* обозначается символами

.

1.4.1 Дифференциал функции

Пусть функция y=f(x) дифференцируема на отрезке [a,b]. Производная этой функции в некоторой точке х этого отрезка определяется равенством

Отношение при Δх→0 стремится к определенному числу f ′(x) и, следовательно отличается от производной f ′(x) на величину бесконечно малую, где α→0 при Δх→0 .

Умножая члены последнего равенства на Δх, получим:

Δy=f ′(x)Δx+αΔx.

Так как в общем случае f ′(x)≠0, то при постоянном х и переменном Δх→0 произведение f ′(x)Δx есть величина бесконечно малая одного порядка малости с Δx, второе слагаемое есть величина высшего порядка малости относительно Δx. Таким образом, произведение f ′(x)Δx является главной частью приращения (4.3), линейной относительно Δx. Это означает, что если приращение аргумента Δx уменьшить в k раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в k раз.

Дифференциалом функции y=f(x) называется главная часть приращения, линейная относительно Δx. Обозначается

dy= f ′(x)dx.

Отсюда следует, что

,

то есть производная функции *f*(*x*) равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента *x*.

1.4.2 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция y=f(x) дифференцируема на некотором отрезке [a,b]. Значения производной f ′(x) зависят от х, т.е. производная f ′(x) тоже представляет собой некоторую функция от х. Дифференцируя эту функцию, мы получаем производную от производной.

⇒О. Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной. Обозначается

y ′′=(f ′(x))′=f ′′(x).

Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна v=f ′(t), а ускорение равно a= f ′′(t).

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется третьей производной функции f(x) и обозначается f′′′(x).

Если определена n-я производная f(n)(x) и существует её произ­водная, то она называется (n+1)-й производной функции f(x):

f(n + 1)(x) = (f(n)(x))′.

Все производные, начиная со второй, называются производными высших порядков.

Дифференциал функции y=f(x) выражается в виде dy= f ′(x)dx. Тогда, если он является некоторой функцией от х, то справедливо следущее:

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом:

d2y= f ′′(x)dx2.

Дифференциал от дифференциала n-го порядка называется дифференциалом (n+1)-го порядка.

1.4.3 Производная функции, заданной параметрически

Пусть даны два уравнения

,

где t принимает значения, содержащиеся на отрезке [Т1,Т2]. Каждому значению t соответствуют значения х и у (функции f и g предполагаем однозначными). Если рассматривать значения х и у как координаты точки на координатной плоскости Оху, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от Т1 до Т2, то точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения называются параметрическими уравнениями этой кривой, t- параметр, а способ задания кривой уравнениями параметрическим. Параметрическое задание кривых широко распространено в механике.

Пусть функция задана параметрическими уравнениями. Тогда производные у от х можно найти по формулам:

Пример. Найти производную функции, заданной параметрически



=

1.4.4 Производные неявной функции.

Если у есть неявная функция от х, т.е. задана уравнением F(x,y)=0 не разрешенным относительно у, то для нахождения производной нужно продифференцировать по х обе части равенства, помня, что у есть функция от х и затем разрешить полученное равенство относительно у′.

Пример. Найти производную неявной функции х2+у2-4х-10у+4=0.

Дифференцируя по х, получаем 2х+2у⋅у′-4-10у′=0. Выражаем у′, имеем:

.

1.4.5 Частные производные

Пусть функция  определена в окрестности точки . Зададим переменной  в точке  приращение , оставляя  неизменным, т.е. перейдем к точке , принадлежащей области  (области определения функции).

**

называется частным приращением по переменной  в точке 

Если существует предел , то он называется частной производной функции  в точке  по переменной . Обозначение:

.

Аналогично определяется

.

Если рассматривать частную производную по переменной  в любой точке области определения функции на области , то частные производные можно рассматривать как новые функции на области .

Таким образом, частная производная функции двух переменных по переменной  есть обычная производная одной переменной  при фиксированном значении .

1.4.6 Производная сложной функции двух переменных

Пусть  – функция двух переменных  и каждая из них является функцией от переменной :.

Тогда  – сложная функция переменной .

Если функции  дифференцируемые в точке ,  – дифференцируема в точке , то сложная функция  также дифференцируема в точке . При этом:



* 1. Задачи по теме «Производные»

1. Пусть дважды дифференцируемая функция f(0)=0. Доказать, что существует такая, что

Решение:

Обозначим . Так как , то по теореме Ролля существуют и такие, что .

Теперь рассмотрим функцию .

Имеем , по теореме Ролля существует , для которой

Откуда следует, что .

1. Найти производную десятого порядка функции в точке . (Межфакультетская олимпиада МПУ "Математический олимп", старшие курсы, 18.10.19)

**Решение**

Разложим в ряд Тейлора:

Поэтому,

1. Сколько точек экстремума на промежутке (0;1] имеет функция ? (Олимпиада МПУ 04.11.17)

**Решение**

Применим логарифмическую производную:

Приравняв производную к нулю получим уравнение:

На промежутке (0;1]  функция слева монотонно возрастает, причем в точке x=1 она равна 0, т.е. она отрицательна. Функция справа на этом же отрезке монотонно убывает, причем на этом отрезке эта функция также отрицательна. Следовательно, они имеют только одну точку пересечения.

Из-за монотонности функций слева и справа знаки выражения будут чередоваться. Следовательно, **один экстремум.**

1. Пусть и . Доказать, что между двумя корнями уравнения g=0 лежит ровно один корень уравнения f=0 и наоборот.

Решение:

Пусть и для всех , следовательно, функция непрерывна на и и по теореме Ролля существует такая, что

Противоречие.

1. Пусть f(x) – дифференцируемая на отрезке [0, 1] функция. Докажите, что уравнение имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функцию . Эта функция дифференцируема на отрезке [0, 1], причем:

Значит, функция F(x) на отрезке [0, 1] удовлетворяет условиями теореме Ролля, т.е. существует такая точка , в которой , то есть

для любой дифференцируемой на отрезке [0, 1] функции f(x). Что и требовалось доказать.

1. Дана дифференцируемая функция . Известно, что при любом . Найти

Решение:

Пусть тогда , откуда

Или

, т.е.

**Задача 1.** Доказать, что если верно равенств

,

то выражение φdu-ydx является полным дифференциалом.

Решение:

Раскрывая определитель, получим равенство:

Используя определения полного дифференциала, получим

.

Данное выражение является полным дифференциалом при условии, что

.

Находя частные производные, получим:

,

что и требовалось доказать.

**Задача 2.** а) Дана дифференцируемая функция f: [0,1] → R. Известно, что при любом . Найдите (здесь – производная справа в точке 0).

б) Дана непрерывная функция f : [0,1] → R. Известно, что при любом . Докажите, что существует .

*Решение:*

а) Пусть .

Тогда , x→ +0,

откуда ,

или , т.е. .

б) Заметим, что *f*(x) = 0 => x = 0, поэтому *f*(x) знакопостоянна. Будем считать *f(x) ≥* 0.

Пусть .

По формуле Тейлора при x,y → 0.

Подставив y=f(x), получаем , x → +0.

Отсюда последовательно получаем при x → +0

Учитывая постоянство знака, получаем

*Замечание.* Классическая теорема о неявной функции в этой задаче не работает – спасает тейлоровское разложение.

**Задача 3.** Доказать, что выражение вида - не имеет интегрирующего множителя, т.е. множителя вида μ(x,y,z), при умножении на который выражение становится полным дифференциалом некоторой функции.

*Решение:*

Предположим, что μ = μ(x,y,z) существует.

Тогда

Следовательно

и из теоремы о равенстве смешанных производных следует

Получим уравнения для μ

Из первого и второго уравнения запишем

и, подставив в третье уравнение, получим

Что и требовалось доказать.

**Задача 4.** Загадали произвольное натуральное двузначное число N. Сначала число N уменьшили на 18, результат возвели в квадрат и прибавили к нему квадрат числа, записанного теми же цифрами, что и число N, но в обратном порядке. Затем из полученного результат 528 раз вычли сумму цифр числа N. В результате получили число M. Укажите самое маленькое число, которое можно получить. Какое число N нужно при этом загадать?

*Решение:*

Пусть х - первая цифра числа N (десятки), у - вторая цифра числа N (единицы). По условию требуется найти наименьшее значение выражения

*Первый способ.*

Рассмотрим в R2 функцию

Исследуем f(x,у) на экстремум. Найдём частные производные:

Приравняв их к нулю, получим стационарную точку x = 4, y = 2. Найдём частные производные второго порядка:

Главные миноры 202 и 2022 - 402 матрицы

положительны. Следовательно, соответствующая квадратичная форма положительно определена и точка (4;2) является точкой локального минимума.

Так как функция имеет единственную стационарную точку, являющуюся минимумом, то в ней функция принимает наименьшее значение, равное f(4; 2) = -2016

*Второй способ.*

.

Для квадратичной формы составим матрицу

и найдем собственные векторы (-1;1) и (1;1). Следовательно, замена

и

позволит избавиться от слагаемого, содержащего произведение переменных. Действительно,

.

Выделим полные квадраты:

.

Отсюда видно, что наименьшее значение равно -2016, и оно достигается при и , т.е. при и . Итак, загадали число 42.

*Ответ:* -2016 и 42.

**Задача 5.** Доказать, что производная нечетной функции есть функция четная.

*Решение:*

Дано .

Дифференцируя обе части, получим

,

что и требовалось доказать.

**Задача 6.** Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной А руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (коэффициент пропорциональности равен k). При какой постоянно скорости V плавание судна будет наиболее экономичным?

*Решение:*

Расходы равны

Где S –длина пути. Найдем производную

Отсюда получаем

– точка минимума.

**Задача 7.** Найдите , если

*Решение:*

Дифференцируя обе части, получим

откуда следует х = 2 и

**Задача 8.** Найти все дифференцируемые на R функции, удовлетворяющие при любых равенству

*Решение:*

Предположим в равенстве y = 0. Получим при любых , следовательно f(0) = 0. Далее продифференцируем равенство по переменной x, полагая *y = const*. Имеем при любых . Отсюда заключаем, что , и

**Задача 9.** Пусть функция f (x) дважды дифференцируема и ограничена на всей оси. Доказать, что существует точка x0, в которой .

*Решение:*

Во-первых, из существования второй производной на интервале следует непрерывность функций *f(x)* и *f '(x)* на том же интервале. В случае, утверждение задачи тривиально.

Пусть *f '(x)* не равна тождественно нулю. Покажем, что *f '(x)* не может быть монотонной функцией. Будем доказывать от противного. Предположим, что *f '(x)* монотонно возрастает (случай монотонного убывания рассматривается аналогично). Тогда либо при , либо при .

В первом случае, интегрируя неравенство, найдем при , и . Во втором случае, также интегрируя, получаем при , и . В обеих случаях функция f(x) оказывается неограниченной на . Итак, функция *f '(x)* не может быть монотонной. В силу её непрерывности, найдутся такие точки , что , и дело сводится к применению теоремы Ролля.

**Теорема**. Пусть функция f(x) дифференцируема в открытом промежутке (a, b), на концах этого промежутка сохраняет непрерывность и принимает одинаковые значения: f(a) = f(b). Тогда существует точка , в которой производная функции f(x) равна нулю: .

Задача 9. Два корабля движутся по двум перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке О, по направлению к О. В какой-то момент времени оба корабля находятся в 84 км от О, скорость первого корабля равна 21 км/ч, скорость второго – 28 км/ч. В течение 2,5 часов от первого корабля должен отойти катер, движущейся со скоростью 28 км/ч. За какое наименьшее время катер сможет доплыть от первого до второго корабля.

**Решение**:

Пусть катер отправляется через х часов с того момента, когда оба корабля находились в 84 км от О и доплывает от первого корабля до второго через y(x) часов (y(x) – функция от х). В момент отправления катер находится на расстоянии 84-21х км от точки О, а в момент прибытия катера ко второму кораблю, он находится на расстоянии км от точки О. Пройденный катером путь составляет 28y(x). В соответствии с теоремой Пифагора получаем уравнение:

Преобразуем, получим:

Найдем точку экстремума функции y(x), продифференцируем уравнение:

Так как точка экстремума x0 производная , получим .

Решим систему:

Функция y(x) выражается из первого уравнения по формуле

Т.к. дискриминант числителя отрицательный, то функция y(x) принимает положительные значения при . В силу того, что , - наименьшее значение; (x0=2,4) – единственная точка экстремума)

Ответ: 1,5 часа.

# 2 Интегралы

2.1 Неопределенный интеграл

2.1.1 Основные понятия и определения

Совокупность всех первообразных функций для данной функции на интервале (*a, b*) называется неопределенным интегралом от функции и обозначается

.

В этом обозначении знак ∫ называется знаком интеграла, выражение— подынтегральным выражением, а сама функция — подынтегральной функцией. Таким образом,

,

где F(x) — некоторая первообразная для , *С* — произвольная постоянная.

2.1.2 Свойства неопределенного интеграла

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть .

Действительно, .

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

.

Это свойство означает, что знаки d и ∫ взаимно сокращаются в случае, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла. В самом деле, по определению дифференциала и свойству 1 имеем

.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, то есть

.

Это свойство означает, что знаки d и ∫ взаимно сокращаются и в случае, если знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к следует добавить произвольную постоянную C . Действительно, так как по определению дифференциала , интегрируя обе части, имеем

.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть

.

Пусть — первообразная для функции *f* (*x*) , то есть *F′* (*x)* = *f* (*x*) . Тогда *αF*(*x*) — первообразная для функции *αf* (*x*) :

.

Из определения неопределенного интеграла следует, что

с точностью до постоянного слагаемого.

5. Интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций

.

В самом деле, пусть *F*(*x*) и *G*(*x*)— первообразные для функций *f*(*x*) и *g*(*x*), то есть *F*′(*x*) = *f* (*x*) и *G*′(*x*) = *g*(*x*) . Тогда функции *F*(*x*) ±*G*(*x*) являются первообразными для функций *f* (*x*) ± *g*(*x*) . Следовательно,

,

где *C1 + C2* = *C*

Нетрудно видеть, что свойство 5 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

2.1.3 Методы вычисления нопределённых интегралов

Существуют следующие методы вычисления неопределённых интегралов:

1. Вычисление интегралов с помощью таблицы интегралов.

Таблица основных интегралов:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

2. Метод подведения под знак дифференциала.

Данный метод основывается на свойствах дифференциалов:

,

(x) + C) = d

3. Метод замены переменной (метод подстановки).

Пусть функция непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке и имеет обратную функцию .

Тогда .

Функцию выбирают таким образом, чтобы правая часть формулы приняла вид, удобный для интегрирования.

После того как вычислен интеграл в правой части формулы, следует вернуться к первоначальной переменной с помощью замены .

4. Метод интегрирования по частям.

Если — дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям: .

Данная формула применяется в случаях, когда подынтегральное выражение можно представить в виде произведения двух множителей и , причем по виду функции легко можно восстановить функцию и вычисление интеграла является более простой задачей, чем вычисление интеграла .

Иногда, чтобы свести данный интеграл к табличному, формулу интегрирования по частям применяют несколько раз. В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получается уравнение, из которого выражается искомый интеграл (так называемый «возвратный» интеграл). Для того чтобы применить эту формулу, нужно правильно подобрать множители и . Как правило, в качестве множителей выбирают либо многочлен, чтобы понизить его степень, либо функцию, от которой трудно найти первообразную.

2.2 Определенный интеграл

2.2.1 Основные понятия и определения

**Определение.** Определенным интегралом функции на отрезке [*a, b*], называется конечный предел интегральной суммы при условии, что число разбиений *n* стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей стремится к нулю, т. е.

Если функция непрерывна на отрезке [*a, b*], то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения [*a, b*] отрезка, на частичные отрезки и от выбора точек на этих отрезках.

Числа *a* и *b* называют нижним и верхним пределами интегрирования.

2.2.2 Свойства определенного интеграла

1. .
2. .
3. .
4. .
5. Интегрирование неравенств:

а) если при , то ;

б) если при , то .

6. Оценка определенного интеграла: если непрерывна на отрезке [*a, b*], *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции на этом отрезке, то

.

7. Теорема о среднем. Если функция непрерывна на отрезке [*a, b*], то .

Для доказательства тождеств с определенными интегралами можно сделать замену переменной таким образом, чтобы подынтегральные выражения в левой и правой частях имели одинаковый вид. Возможно, при этом исходный интеграл разбить на два и в одном из них сделать замену переменной, а потом собрать их в один, используя чётность или нечётность какой-либо функции. Если есть несколько интегралов, в которых присутствует одна неизвестная с разными аргументами, то есть сделать замену так, чтобы аргументы после замены стали одинаковыми. Может быть, в одном или нескольких интегралах надо проинтегрировать по частям.

2.3 Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметров

Способы вычисления интеграла, зависящего от параметра:

1. Продифференцировать или проинтегрировать по параметру;

2. Вычислить полученный интеграл;

3. Проинтегрировать или продифференцировать по параметру для получения исходного интеграла, а произвольную постоянную найти, вычислив данный интеграл при каком-то значении параметра.

Можно также составить дифференциальное уравнение (неизвестная функция – искомый интеграл, переменная – параметр) и решить его.

Вычисление интеграла In с целым параметром:

1. вычислить *I1, I2*;
2. вывести рекуррентное соотношение (выразить *In+1* или *In+2*через *In*) и с его помощью найти нужный интеграл. Возможно в задаче фигурирует конкретное значение n (то есть формально параметра нет), но выводить часто удобнее общее рекуррентное соотношение, а потом применить его нужное количество раз. Независимость интеграла от параметра можно установить непосредственно, а если это не удаётся сделать, то продифференцировать его по параметру и доказать, что производная равна нулю;
3. при дифференцировании несобственного интеграла по параметру необходимо сначала установить его равномерную сходимость по этому параметру. Для этого достаточно воспользоваться одним из признаков равномерной сходимости по параметру.

Отсутствие или неполнота такой проверки – грубая ошибка. Формальное вычисление в таком случае не представляет решения.

1. для вычисления интеграла без параметра часто удобно параметр ввести и, используя описанные выше приёмы, найти этот более общий интеграл, а затем взять нужное значение параметра и получить ответ.

**Признак Вейерштрасса**

Пусть для любого функция интегрируема по *x* на любом отрезке и пусть на [*a, b*) существует функция такая, что для всех и всех выполнено неравенство , а несобственный интеграл сходится. Тогда интеграл сходится равномерно по параметру *y* на множестве *Y*.

**Признак Дирихле**

Пусть:

1. для любого функции , и непрерывны как функции *x* на полуинтервале ;
2. функция *F* (*x, y*), являющаяся при любом первообразной по *x* функции , ограничена при , ;
3. при , ;
4. существует непрерывная на функция *ψ* (*x*) такая, что и для , .

Тогда интеграл сходится равномерно по параметру .

**Критерий Коши**

Для того чтобы несобственный интеграл сходился равномерно по параметру y на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого существовало такое, что для любых и для любого выполнялось неравенство

*.*

2.4 Задачи по теме «Интегралы»

**Задача 1.**

*Решение:*

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

+

Мы видим, что Sinx второго интеграла полностью совпадает с производной знаменателя, из этого делаем вывод, что можно вычислить при помощи внесения функции под знак дифференциала.

Теперь перейдем к первому интегралу:

Очевидно, интегрировать нужно по частям.

Объединим результаты:

**Задача 2.**

*Решение:*

Разбиваем исходный интеграл 𝐼 на два: , после чего во втором интеграле делаем замену 𝑥 = 𝜋 − 𝑡. Тогда

Записывая под одним интегралом, приводим полученные дроби к общему знаменателю:

**Задача 3.**

*Решение:*

Множество интегрирования 𝐺 представляет собой пересечение I четверти, круга радиуса 2 с центром (0; 0) и множества точек, лежащих вне окружности радиуса 1 с центром (1; 0). Если ввести полярные координаты (𝑥 = 𝑟 cos , 𝑦 = 𝑟 sin ), множество интегрирования упрощается:

Записывая искомый интеграл в новых координатах в виде двойного, а потом повторного (и учитывая, что 𝑑𝑥𝑑𝑦 = 𝑟𝑑𝑟𝑑), получаем

**Задача 4.** Доказать, что при a > 1 справедливо равенство

*Решение:*

Требуемый результат получается сразу, если сходный интеграл следующим образом разбить на два интеграла, а затем во втором проинтегрировать по частям:

**Задача 5.** Зная, что, вычислить

*Решение:*

Пусть:

Тогда:

**Задача 6.** Вычислите интеграл при всех допустимых значения a и b.

*Решение:*

В области, где , при ab = 0 – интегралы табличные:

.

При ab ≠ 0,

**Задача 7.**Вычислить .

*Решение:*

**Задача 8.** Вычислить: где .

*Решение:*

Перейдем в полярную систему координат:

**Задача 9.** Вычислить.

*Решение:*

Решение найдем методом замены переменной в определенном интеграле (т.е. меняется не только переменная интегрирования, но и пределы интегрирования):

так как подынтегральная функция нечетная, а отрезок интегрирования симметричный:

т. е.

**Задача 10.** (Без решения.) Найдите значение интеграла

2.5 Задачи из олимпиад Московского Политеха

**Задача 1.** Вычислить

*Решение:*

Обозначим и .

Имеем .

Теперь рассмотрим

Тогда

**Задача 2.** Вычислить интеграл .

*Решение:*

**Задача 3.** Вычислить интеграл, если .

*Решение:*

Воспользуемся формулой откуда , тогда

Повторяя данные преобразования придем к интегралу

**Задача 4.** Вычислите интеграл , – целая часть числа x.

*Решение:*

Учитывая определение целой части числа, представим интеграл в виде суммы интегралов:

.

**Задача 5.** Вычислить определённый интеграл

*Решение:*

Попробуем «свести интеграл к самому себе», то есть получить уравнение относительно искомого интеграла. При этом используем тригонометрические формулы, связывающие арктангенс с самой «родственной» ему обратной тригонометрической функцией — арккотангенсом:

.

Преобразуем исходный интеграл:

Из полученного уравнения легко находится искомый интеграл. Выражение в круглых скобках из последней формулы может быть преобразовано к , если воспользоваться формулой справедливой при (здесь .

Ответ:

**Задача 6**. Найти

*Решение:*

Обозначим искомый интеграл через I. Сделаем в нем замену . Получим, что Переобозначая переменную интегрирования снова через x и складывая два выражения для I, получаем, что Значит, I = .

Ответ: I = .

# 3 Дифференциальные уравнения

3.1 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

… (1)

где x ∈R – независимая переменная; y(x) – искомая функция; …, – заданные числа, причем ; – известная функция, не равная тождественно нулю.

Уравнение

…2)

называется однородным.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (2) и любого частного решения неоднородного уравнения (1):

(3)

Общее решение однородного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (2) называется совокупность n линейно независимых решений этого уравнения.

Общее решение однородного уравнения (2) представляет собой произвольную линейную комбинацию частных решений, входящих в фундаментальную систему решений,

Далее мы будем рассматривать уравнения с действительными коэффициентами, их решения будем искать в действительной форме.

Характеристическим уравнением, соответствующим однородному уравнению (2), называется алгебраическое уравнение

Обозначим через , …, корни характеристического уравнения (5), вообще говоря, комплексные.

1) Каждому действительному простому корню λ характеристического уравнения (5) соответствует частное решение однородного уравнения (2), имеющее вид .

2) Каждому действительному корню λ кратности ) соответствует линейно независимых частных решений однородного уравнения . Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2) имеет вид

, (6)

где – произвольные постоянные.

3) Если , где и – действительные, , а , является корнем характеристического уравнения (5), то комплексно-сопряженное число также корень этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами).

Напомним, что для комплексного числа , где x, y ∈ R, его действительной и мнимой частью называются соответственно, Кроме того, имеет место формула Эйлера

Паре невещественных корней соответствуют два линейно независимых действительных частных решения однородного уравнения (2) и , которые включают в фундаментальную систему решений, вместо функций , . Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2) представляется в виде

где – произвольные постоянные.

4) Если среди корней характеристического уравнения (5) есть корень кратности ), то и комплексно-сопряженный ему корень имеет ту же кратность k. Этим невещественным корням соответствуют 2k линейно независимых частных действительных решений однородного уравнения (2)

Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2) имеет в этом случае вид

где – произвольные постоянные.

Так можно построить совокупность решения, являющуюся общим решением уравнения (2).

Частное решение неоднородного уравнения с правой частью специального вида

Пусть правая часть f (x) неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, т.е. является суммой функций вида

,

здесь и – многочлены степени m и n соответственно.

В этом случае для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения можно использовать *метод неопределенных коэффициентов.*

5) Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

, где – многочлен степени m.

Если γ не является корнем характеристического уравнения (5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде

где – многочлен той же степени m.

Если γ является корнем (5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (1) ищется в виде

Для определения коэффициентов многочлена следует (9) или (10) подставить в (1), сократить на и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. Из получившейся системы алгебраических уравнений найдем эти коэффициенты.

6) Пусть коэффициенты левой части уравнения (1) действительны, а его правая часть имеет вид

Если не является корнем характеристического уравнения (5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде

где – наибольшей из степеней многочленов и , и – многочлены степени не выше p.

Если является корнем (5) кратности , то говорят, что имеет место резонанс кратности ; частное решение (1) ищется в виде

Чтобы найти коэффициенты многочленов и , надо подставить (11) или (12) в уравнение (1), приравнять коэффициенты при подобных членах и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Если правая часть уравнения (1) представима в виде суммы нескольких функций ,то частное решение неоднородного уравнения (1) состоит из суммы частных решений неоднородных уравнений

3.2 Задача Коши

Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка называется уравнение

где – независимая переменная, – искомая функция, функция F определена и непрерывна в некоторой области и зависит от

Решением уравнения (13) на интервале называется функция , удовлетворяющая условиям:

F

Задача Коши, или начальная задача, для уравнения (13) ставится следующим образом: заданы числа такие что и Требуется найти такое решение уравнения (13), которое удовлетворяет условиям

Замечание. Характерная особенность задачи Коши состоит в том, что условия на искомое решение задаются в одной и той же точке . Общим интегралом уравнения (13) называется соотношение, связывающее произвольных постоянных

Значения этих произвольных постоянных можно найти, при определенных требованиях к функции

F, используя начальных условий

3.3 Теорема Ролля

Теорема. Пусть функция    дифференцируема в открытом промежутке  , на концах этого промежутка сохраняет непрерывность и принимает одинаковые значения: . Тогда существует точка  , в которой производная функции    равна нулю:  .

**Доказательство.** Если     в промежутке  , то    во всех точках этого промежутка. Иначе наибольшее значение M функции    превышает ее наименьшее значение m в промежутке  . Поскольку на концах этого промежутка функция  ,  принимает одинаковые значения, то по крайней мере одно из значений, M или m, достигается во внутренней точке промежутка  . Тогда по теореме Ферма  .

3.4 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое входят, независимое переменное, неизвестная функция и производные от этой неизвестной функции. При этом в уравнение обязательно должны входить производные, а независимое переменное и сама искомая функция явно могут не входить.

Например,

являются дифференциальными уравнениями, хотя второе и третье уравнения не содержат явно неизвестной функции, а в четвертое не входит независимое переменное.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

Примерами дифференциальных уравнений второго порядка могут служить следующие:

Уравнение  есть дифференциальное уравнение третьего порядка. Уравнение  — пятого порядка. Примером дифференциального уравнения порядка n может служить уравнение

Решить, или проинтегрировать, дифференциальное уравнение—это значит найти такую функцию, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, обращает его в тождество. Такая функция называется решением дифференциального уравнения.

Например, функция  является решением дифференциального уравнения  . Действительно,  , подставляя  ,   в уравнение  , получаем   , т. е. тождество.

Если решение дифференциального уравнения содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, то такое решение называется общим решением дифференциального уравнения.

Поясним, что называют независимыми произвольными постоянными:

Постоянные, входящие в решение, называются независимыми, если они входят в решение так, что нельзя заменить никакую комбинацию двух или нескольких из них при помощи введения нового постоянного и тем самым уменьшить число постоянных.

Например, если имеем  , то сюда входят три постоянных  и . Однако можно заданное уравнение переписать в виде ,. Если теперь обозначим , через , то последнее уравнение перепишется так: . В этом уравнении постоянных только два и . Таким образом, в первоначальном уравнении постоянные  и  не были независимыми.

Также, если рассмотрим уравнение  то его можно переписать в виде

 ;

обозначив  , через , a  через  получим

Следовательно, в уравнении  постоянные  и  не являются независимыми.

Решение, которое получается из общего при определенных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Геометрический смысл общего решения: общее решение дифференциального уравнения является семейством кривых, зависящим от произвольных постоянных в числе, равном порядку дифференциального уравнения. Частное решение имеет своим графиком какую-нибудь из кривых, входящих в указанное семейство. Эти кривые называются интегральными кривыми. Часто встречается задача, в которой нужно определить частное решение по начальным данным, или начальным условиям.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция  которая при подстановке функций и её производных в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция  является решением уравнения так как  для любых .

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется задачей интегрирования данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение

,

которое является функцией переменной  произвольных независимых постоянных  (Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.)

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных

3.5 Задачи по теме «Дифференциальные уравнения»

**Задача 1.**Найдите все кривые на плоскости 𝑂𝑥𝑦, для каждой из которых отрезок любой касательной, заключённый между координатными осями, имеет одинаковую длину.

*Решение:*

Пусть кривая задана уравнением . Тогда уравнение касательной к ней в точке имеет вид:

Координаты точек пересечения касательной с координатными осями:

Длина отрезка касательной, заключенной между координатными осями, равна и по условию задачи постоянна, то есть

Подставим сюда полученные выражения для и переобозначим через , через , через . Тогда

Запишем это уравнение в виде

и продифференцируем его по :

Это уравнение можно записать как

что эквивалентно объединению трех уравнений:

Из (1) получим из (2) получим где и – произвольные числа.

Рассмотрим уравнение (3). Разрешив его относительно получим

В этом уравнении переменные разделяются:

.

Проинтегрировав, получим

откуда

где – произвольная константа.

Ответ: .

**Задача 2.** В дифференциальном уравнении (𝑥2 − 𝑥4)𝑦′′ + 2(𝑥 − 𝑥3)𝑦′ − 2𝑦 = 0сделайте такую замену переменной (перейдите к новой независимой переменной), чтобы в новом уравнении отсутствовал член с первой производной неизвестной функции.

*Решение:*

Будем искать замену переменной в виде 𝑡 = 𝜑(𝑥). Тогда

где точки обозначают производные по t.

Подставив полученные выражения для и в исходное дифференциальное уравнение, получим

(𝑥2 − 𝑥4)(𝜑′)2𝑦̈ + ((𝑥2 − 𝑥4)𝜑′′ + 2(𝑥 − 𝑥3)𝜑′)𝑦̇ − 2𝑦 = 0.

Приравняв к нулю коэффициент при 𝑦̇, получим уравнение относительно неизвестной функции 𝜑(𝑥):

𝑥𝜑′′ + 2𝜑′ = 0.

Введя новую неизвестную функцию 𝑧(𝑥) = 𝜑′(𝑥), получим для неё уравнение с разделяющимися переменными:

𝑥𝑧′ + 2𝑧 = 0.

Его общее решение

Тогда

Любую функцию такого вида, кроме постоянной функции, можно принять за новую независимую переменную. Например, пусть

После перехода к новой независимой переменной 𝑡 дифференциальное уравнение принимает вид

(𝑡2 − 1)𝑦̈ − 2𝑦 = 0.

**Задача 3.** Решите дифференциальное уравнение

*Решение:*

Раскроем скобки в левой части данного уравнения:

Заметим, что является решением этого уравнения.

При поделим уравнение на

Сделаем замену:

Тогда уравнение примет вид

Раскроем скобки и перегруппируем члены:

Заметим, что не является решением этого уравнения. Поделим на :

Относительно неизвестной функции это уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение соответствующего однородного уравнения находится методом разделения переменных:

а общее неоднородного уравнения – методом вариации постоянной:

,

где C – произвольная константа.

Умножим полученное выражение на

Подставив сюда получим ответ

к которому надо добавить полученное выше решение

**Задача 4.** Решите интегро-дифференциальное уравнение

*Решение:*

Предположим, что решение уравнения

существует. Тогда — некоторое число. Уравнение (1) можно записать в виде .

Относительно функции 𝑦(𝑥) это линейное неоднородное диффенциальное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид

𝑦(𝑥) = 𝜆,

где 𝐶 — произвольная константа.

Подставив найденное решение в условие получим

𝜆 = Таким образом, если уравнение (1) имеет решение, то это решение имеет вид

𝑦(𝑥) = − (2)

Подставив функцию (2) в уравнение (1), убедимся, что она действительно является его решением, таким образом, общее решение уравнения (1) имеет вид (2).

**Задача 5.** Дифференциальное уравнение 𝑦′′ + 𝑝(𝑥)𝑦′ + 𝑞(𝑥)𝑦 = 0 имеет два частных решения, произведение которых равно 1. Найдите связь между функциями 𝑝(𝑥) и 𝑞(𝑥).

*Решение:*

Обозначим частные решения уравнения 𝑦′′ + 𝑝(𝑥)𝑦′ + 𝑞(𝑥)𝑦 = 0

через (𝑥), (𝑥). По условию задачи

(𝑥) (𝑥) = 1. (3)

Продифференцируем тождество (3) по 𝑥:

+ = 0. (4)

Тождество (4) ещё раз продифференцируем по 𝑥:

= 0. (5)

Рассмотрим тождества

= 0, (6)

= 0. (7)

Умножив тождество (6) на , тождество (7) — на , и сложив их, получим

+ + 𝑝( + ) + 2𝑞 = 0.

С учётом (3), (4), (5) полученное тождество принимает вид

= 0,

откуда

𝑞 = . (8)

Умножив тождество (6) на , тождество (7) — на , и сложив их, получим

+ + 2𝑝 + 𝑞 ( + ) = 0.

С учётом (4), (8) полученное тождество принимает вид

𝑞 ′ + 2𝑝𝑞 = 0.

Это и есть искомое соотношение между функциями.

**Задача 6.** Найти действительные решения уравнения Исходное уравнение неоднородное.

*Решение:*

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

Составляем характеристическое уравнение: .

Корень = 1 – угадываем. дает

Корню характеристического уравнения = 1 соответствует частное решение , корням – решения и .

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

Где – действительные произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае т.е.

где .

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

т.е. m = 0, γ = 1 (что соответствует = 1) – резонансный случай, кратность корня s = 1, поэтому частное решение ищем в виде .

Подставляя .1 в исходное дифференциальное уравнение при получаем

.

Приравнивая выражения при одинаковых функциях, имеем

т.е. m = 1, γ = 0 (таких корней у характеристического уравнения нет), т.е. кратность корня s = 0, поэтому частное решение ищем в виде

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение при , получаем . Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем:

Это дает и

a это дает a = 1, 5 1 5 1 b = a = и 5 1 2 yч = x + .

Частное решение неоднородного уравнения

Общее решение неоднородного уравнения:

**Задача 7.** Решить задачу Коши

*Решение:*

Так как x явно не входит в уравнение, то делаем замену при которой

Исходное дифференциальное уравнение принимает вид

1) при получаем – не годится из-за начальных условий;

2) при получаем – уравнение с разделяющимися переменными.

(здесь -произвольное, т.к. а) сняли знак модуля; б) учли возможность).

Для определения постоянной используем начальные условия Таким образом, , тогда – уравнение с разделяющимися переменным:

Подставляя сюда начальное значение

Частное решение, соответствующее поставленным начальным условиям:

3.6 Задачи из олимпиад Московского Политеха

**Задача 1.** Два корабля движутся по двум перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке О, по направлению к О. В какой-то момент времени оба корабля находятся в 84 км от О, скорость первого корабля равна 21 км/ч, скорость второго – 28 км/ч. В течение 2,5 часов от первого корабля должен отойти катер, движущейся со скоростью 28 км/ч. За какое наименьшее время катер сможет доплыть от первого до второго корабля.

*Решение:*

Пусть катер отправляется через часов с того момента, когда оба корабля находились в 84 км от О и доплывает от первого корабля до второго через часов ( – функция от х).

В момент отправления катер находится на расстоянии км от точки О, а в момент прибытия катера ко второму кораблю, он находится на расстоянии км от точки О. Пройденный катером путь составляет .

В соответствии с теоремой Пифагора получаем уравнение:

Преобразуем, получим

Найдем точку экстремума функции , продифференцируем уравнение:

Так как в точке экстремума производная , получим

Решим систему

.

Функция выражается из первого уравнения по формуле

Т.к. дискриминант числителя отрицателен, то функция принимает положительные значения при . В силу того, что

, – наименьшее значение;

(– единственная точка экстремума).

*Ответ:* 1,5 час.

**Задача 2.** Пусть функции непрерывны на отрезке, дифференцируемы во всех его внутренних точках. Доказать, что существует , в которой

*Доказательство:*

Введем вспомогательную функцию

Очевидно, что она непрерывна на , дифференцируема на и

По теореме Ролля существует , в которой .

**Задача 3.**

Составить уравнение касательной к графику чётной функции в точке с абсциссой , если известно, что для всех действительных справедливо равенство

*Решение:*

Уравнение касательной в точке с абсциссой имеет вид:

Найдем и

Используя заданное равенство при получим

По условию задачи функция является чётной, тогда:

Продифференцируем исходное равенство:

Подставляя в полученное соотношение, имеем:

Так как , то

Продифференцируем условие чётности функции

Отсюда имеем, что

Подставляя в уравнение (2), находим

Таким образом, уравнение касательной к графику чётной функциив точке с абсциссой имеет вид:

или

*Ответ:*

**Задача 4.** Найдите решение дифференциального уравнения , ограниченное при

*Решение:*

Заметим, что не может быть нулевой на интервале. Поэтому справедливы преобразования уравнения

**Приведем к уравнению с разделенными переменными**

Следовательно, данное уравнение имеет решение

Среди таких функций ограниченной является только функция при **.**

***Ответ:***

**Задача 5.**

Под действием некоторой силы материальная точка движется по кривой

Действие силы прекратилось в тот момент, когда точка занимала положение . Определить дальнейшую траекторию точки.

*Решение:*

- эллипс;

- дифференцирование неявно заданной функции;

**- уравнение траектории точки (точка движется по касательной к кривой.**

*Ответ:* Точка движется по касательной к кривой.

# 4 Ряды

4.1 Основные понятия и термины

1. Признак Куммера. Пусть дан ряд c положительными членами. Пусть ряд

, (

расходится. Тогда, если начиная с некоторого номера выполняется неравенство

то ряд сходится. Если начиная с некоторого номера выполняется неравенство

то ряд расходится.

2.Признак Гаусса. Пусть дан ряд c положительными членами. Пусть отношение может быть представлено в виде

где μ - постоянная, а δn - ограниченная последовательность. Тогда ряд

сходится, если μ > 1, и расходится - если μ ≤ 1.

3. Необходимое условие сходимости ряда с монотонно убывающими членами. Пусть дан ряд ∑an c монотонно убывающими и положительными членами. Тогда для его сходимости необходимо, чтобы

4. Признаки Абеля-Дини. Если ряд с положительными членами расходится, и Sn - его n-ая частичная сумма, то ряд

также расходится, в то время как ряд

сходится.  
Если ряд с положительными членами сходится, и rn - его остаток после n-го члена, то ряд расходится, в то время как ряд

сходится.  
5. Теорема Таубера-Фробениуса. Если Sn - n-ая частичная сумма

ряда ряда = ◦(1/n)

то и Sn →A.

4.2 Задачи по теме «Ряды»

**Задание 1.** Известно, что . Найти сумму ряда .

*Решение:*

Имеем

Откуда

**Задание 2.** Пусть . Доказать, что ряд сходится.

*Решение:*

Так как последовательность ограничена сверху и возрастает, то она некоторый конечный предел . Поэтому ряд

составленный из положительных чисел сходится. Далее

Поэтому, на основании признака сравнения, исходный ряд тоже сходится.

**Задание 3.** Исследовать на сходимость ряд , где - положительные корни уравнения , расположенные в порядке возрастания.

*Решение:*

Графические анализ функций и показывает, что , Отсюда

и сходимость исследуемого ряда следует из признака сравнения.

**Задание 4.** Доказать, что , , где - постоянная.

*Решение:*

Доказательство эквивалентно установлению существования предела последовательности . Можно заменить здесь на , т.к. их разность есть бесконечно малая. Имеем

Так как

,

тогда

Поэтому предел возрастающей последовательности мажорируется сверху суммой сходящегося ряда и, следовательно, существует, ч. и т.д.

**Задание 5.** Пусть для любой вещественной последовательности такой, что , сходится ряд , где - некоторая вещественная последовательность. Доказать, что .

*Решение:*

Будем доказывать от противного. Предположим, что

,

и построим такую последовательность

,

что ряд расходится. Искомой последовательностью является последовательность

,

где .

Действительно, в силу признака Абеля-Дини, ряд

сходится, а ряд

расходится.

Полученное противоречие и доказывает сделанное утверждение, т.е.

# 5 Комбинаторика и теория вероятности

5.1 Основные понятия и термины

Закономерности, распространенные на испытания с произвольным числом исходов, позволяют строить простейшую математическую модель случайного эксперимента. Построение начинается с описания множества Ω всевозможных исходов ω, которые могут произойти в результате каждого испытания. Множество Ω называется пространством элементарных исходов, его точки (элементы) ω – элементарными исходами или элементарными событиями. Любое подмножество A пространства Ω (совокупность элементарных исходов ω) называется событием; пространство Ω также является событием, но имеющим особое название достоверного события. Говорят, что произошло событие A, если в испытании наблюдается элементарный исход ω ∈ A.

Если ограничиться рассмотрением пространств элементарных исходов, состоящих из не более чем счетного числа элементов, то построение вероятностной модели по существу состоит в задании распределения вероятностей на пространстве Ω, в соответствии с которым каждому элементарному исходу ω ∈ Ω ставится в соответствие число p (ω), называемое вероятностью элементарного события ω. Постулируется, что 0 ≤ p (ω) ≤ 1, каково бы ни было ω ∈ Ω, и . Вероятность любого составного события A вычисляется по формуле P(A) = .Число P(A) интерпретируется как относительная частота появления события A в статистическом эксперименте, состоящем из достаточно большого числа испытаний.

|  |  |
| --- | --- |
| Теоретико-множественные объекты и операции | Вероятностная трактовка |
|  | Пространство элементарных исходов, достоверное событие |
|  | Элементарный исход эксперимента, элементарное событие |
|  | Событие |
|  | Невозможное событие |
|  | Событие A влечет событие B |
|  | Событие A не произошло |
|  | Произошло по крайней мере одно из событий A или B |
|  | Произошли одновременно оба события А и В |
| вычитается подмножество В | Произошло событие А, в то время как событие В не произошло |
| - множества А и В не имеют общих точек (не пересекаются) | События А и В несовместны |

5.1.1 Теория вероятности.

Вероятностью события A в некотором испытании называют отношение:

 P (A) = m/n, где n — общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m — количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

**Свойства вероятности:**

Вероятность достоверного события равна единице.

Вероятность невозможного события равна нулю.

Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству 0 ≤ P(A) ≤ 1.

5.1.2 Комбинаторика

**1. Перестановки.**

Пусть имеется n различных объектов.

Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно Pn=n!=1⋅2⋅3⋅...⋅(n−1)⋅n

**2. Размещения.**

Пусть имеется n различных объектов.

Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются размещениями из n объектов по m, а их число равно

A = =n⋅(n−1)⋅...⋅(n−m+1)

**3. Сочетания.**

Пусть имеется n различных объектов.

Будем выбирать из них m объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются сочетаниями из n объектов по m, а их число равно

C=

5.2 Задачи по теме «Комбинаторика и теория вероятности»

**Задача 1.** (Всеукраинская студенческая олимпиада по математике в 2005 году)

Какова вероятность того, что при бросании монеты серия из трёх орлов подряд выпадет раньше, чем серия из двух решек подряд?

*Решение:*

Будем обозначать выпадение орла как 0, а решку – как 1. Найдём сначала, сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины n таких, которые заканчиваются ровно тремя нулями и не содержат других троек нулей и пар единиц. Обозначим это количество как Х(n), а выделенное жирным условие как Условие 1. Оно нам ещё пригодится.

Понятно, что для n=1 или n=2 таких последовательностей не существует. Для n=3 возможна только единственная: 000. Далее цепочки длины n+1 можно получать из цепочек длины n, подставляя в качестве первого символа 0 или 1 с тем, чтобы продолжало выполняться Условие 1. Первые несколько шагов представлены в таблице.

Более наглядно процесс образования цепочек большей длины показывает вот такое дерево:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 1- | -0- | -0- | -1- | -0- | -0- | -1- | -0- |  |  |  |
| 0- | -1- |
| 0- | -1- | -0- | -0- | -1- |
| 0- | -0- | -1- |
| 1- |
| 0- | -1- | -0- | -0- | -1- | -0- | -0- | -1- | -0- | -1 | -000 |
| 0- | -0- | -1- |
| 1- |
| 0- | -0- | -1- | -0- | -0- | -1- |
| 1- |
| 1- | -0- | -0- | -1- |
| 0- | -1- |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | X(n) | Возможные цепочки |
| 1 | 0 | - |
| 2 | 0 | - |
| 3 | 1 | 000 |
| 4 | 1 | 1000 |
| 5 | 1 | 01000 |
| 6 | 2 | 101000; 001000 |
| 7 | 2 | 0101000; 1001000 |
| 8 | 3 | 00101000; 10101000; 01001000 |
| 9 | 4 | 100101000; 010101000; 001001000; 101001000; |

Поскольку всего цепочек из 0 и 1 длины n – 2n, то вероятность того, что три орла выпадут раньше двух решек после ровно n бросков, составляет .Таким образом, для вычисления искомой вероятности требуется найти сумму .

Для этого сначала нужно найти общую формулу X(n). Введём 3 вспомогательных величины.

- A(n) – количество цепочек из 0 и 1 длины n, которые удовлетворяют Условию 1 и начинаются с 00

- B(n) – количество цепочек из 0 и 1 длины n, которые удовлетворяют Условию 1 и начинаются с 01

- C(n) – количество цепочек из 0 и 1 длины n, которые удовлетворяют Условию 1 и начинаются с 10

При образовании цепочки длины n+1 перед каждой цепочкой, начинающейся с 00 для соблюдения Условия 1 можно ставить только 1, перед цепочками на 10 – только 0, а перед цепочками на 01 можно ставить и 0 и 1.

Получаем:

A(n+1) = B(n)

B(n+1) = C(n)

C(n+1) = A(n)+B(n)

Далее:

A(n+2) = B(n+1) = C(n)

B(n+2) = C(n+1) = A(n)+B(n)

C(n+2) = A(n+1)+B(n+1) = B(n)+ C(n)

И ещё один шаг:

A(n+3) = B(n+2) = A(n)+B(n)

B(n+3) = C(n+2) = B(n)+ C(n)

C(n+3) = A(n+2)+B(n+2) = A(n)+B(n)+ C(n)

Тогда:

X(n+3) = A(n+3)+B(n+3)+C(n+3) = 2A(n)+3B(n)+2C(n) = X(n+1)+X(n)

Мы получили для X(n) рекуррентную формулу.

**Задача 2.** (Всеукраинская студенческая олимпиада по математике в 2005 году)

Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орел выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орел выпадет меньше 35 раз. Найдите p – q.

*Решение:*

p = p55 + p56 + … + p90 , где pi – вероятность того, что орел выпадет i раз

Аналогично q = p0 + p1 + … + p34

Заметим, что p0 = p90, p1 = p89, то есть pi = p90-I , так как если орел выпал 90 раз, значит решка выпала 0 раз, а так как орел и решка равноправны, то вероятность выпадение решки 0 раз = вероятность выпадения орла 0 раз.

Итак: p – q = p90 + p89 + … + p55 – (p0 + p1 + … + p34) = p55

А вероятность выпадения орла ровно 55 раз =

**Задача 3.** (Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом, 2007 г)

Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

Пусть Ai — множество распределений подарков по ящикам, когда i-й ящик пуст, i = 1, 2, 3. Очевидно, что . Кроме того, и  при . Поэтому



Всего возможных распределений призов 35, искомая вероятность равна 93/35 = 31/81.

**Задача 4.** (Всероссийский студенческий турнир математических боёв, организуемый Тульским педагогическим университетом им. Л.Н. Толстого, 2013 г)

Из вершин правильного n-угольника (n ≥ 6) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?

*Решение:*

Выделим произвольную шестёрку точек, а в ней какую-то точку A. Число способов добавить к A две точки, чтобы получить тройку, равно  (оставшиеся три точки образуют другую тройку). Число способов, при которых треугольники с вершинами в этих тройках не пересекаются, равно 3 (точки в треугольниках должны идти в порядке их следования по часовой стрелки, при этом точка A в своём треугольнике будет первой, второй или третьей). Значит, для выделенной шестёрки точек вероятность того, что треугольники не пересекаются, равна 3/10. Поскольку это верно для любой шестёрки точек, искомая вероятность также равна 0,3.

**Задача 5.** (Олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете, 2012 г)

Среди вершин правильного (2n + 1)-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

*Решение:*

Зафиксируем одну из трёх выбранных точек. Обозначим её B. Следующие за ней по часовой стрелке точки обозначим . В качестве двух других вершин треугольника могут быть выбраны любые две из 2n точек. Всего возможных вариантов . Подсчитаем, в скольких случаях получится остроугольный треугольник. Ясно, что из групп точек  и  должно быть выбрано ровно по одной точке. Пусть из первой группы выбирается точка , а из второй — . При этом в треугольнике ­ углы при вершинах  ибудут острыми. Для того, чтобы был острым и угол при вершине B, необходимо и достаточно выполнение условия . При i = k индекс j может быть равен  — всего имеем k вариантов. Значит, общее число способов выбрать вершины  и равно

.

Осталось подсчитать искомую вероятность:



**Задача 6.** (Олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете, 2013 г)

Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдётся маршрут, который в глазах путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы?

*Решение:*

Найдем вероятность того, что предпочтительного маршрута не окажется. Так как в нашем случае маршрут считается предпочтительным, если его выбрали 2 или 3 путешественника, то в случае отсутствия предпочтительного маршрута можно считать, что на первом месте каждый маршрут встречался по одному разу. Если при этом какой-то маршрут будет вторым в списках предпочтений путешественников дважды, то он (всякий раз по мнению двух из трёх) будет лучше каждого из двух других маршрутов. Таким образом, если выбор первого (a, b, c), то второй и третий должны в каком-то порядке выбрать (b, c, a) и (c, a, b). Вероятность этого . А вероятность противоположного события, которую и требуется найти в задаче, равна 17/18.

**Задача 7.** (Открытая международная студенческая интернет-олимпиада по математике, 2010)

В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?

*Решение:*

Добавив два воображаемых бара, получим 10 баров, в каждом из которых бродяга оказывается с вероятностью 0,1. Известно, что в 7 «реальных» барах его не было. Из трёх оставшихся баров реален только один. Поэтому вероятность, с которой он окажется там, равна 1/3.

**Задача 8.** (Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом, 2004 г)

Из n вопросов, вынесенных на зачёт, студент выучил m вопросов (). Зачёт ставится, если студент ответит не менее чем на половину вопросов. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя?

*Решение:*

Вычислим вероятность  не сдать зачёт, если в билете k вопросов.

Пусть в билете два вопроса. Студент не сдаст зачёт, только если не ответит на оба вопроса. Поэтому

.

Если в билете четыре вопроса, зачёт не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один (любой из четырёх). Значит,



Найдем разность полученных вероятностей.



Если , то вероятность сдать зачёт больше, когда в билете два вопроса. Так будет, если. В случае равенства оба билета одинаково выгодны, при противоположном знаке выгоден билет с 4 вопросами.

**Задача 9.** (Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом, 2004 г)

В двух урнах лежит 25 шаров белого и чёрного цвета. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0,54. Найдите вероятность того, что они оба чёрные.

*Решение:*

Пусть в i-й урне  шаров, среди которых  белых, i = 1, 2. Тогда . Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства , . Одно из чисел  делится на 5, тем же свойством обладает и второе из них (так как их сумма равна 25). Пусть . Возможны два случая:

, . Тогда , причём , , так что , .

, . Тогда , причём , , так что 

В обоих случаях вероятность вынуть два черных шара равна .

**Задача 10.** (Открытая международная студенческая интернет-олимпиада по математике, 2014)

Монету подбросили 10 раз. Найдите вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта не будет двух последовательных орлов.

*Решение:*

Результаты подбрасываний монеты запишем двоичной последовательностью, в которой 1 (0) на i-м месте означает, что при i-м броске выпал орёл (соответственно, решка). Назовём двоичную последовательность хорошей, если в ней нет двух соседних единиц. Пусть  — количество хороших последовательностей длины n. Очевидно, , .

Если хорошая последовательности из n символов оканчивается нулём, то её можно получить из произвольной хорошей последовательности длины n−1 приписыванием справа нуля. Значит, имеется ровно  таких последовательностей.

Если же хорошая последовательности из n символов оканчивается единицей, то её предпоследняя цифра — ноль, и эту последовательность можно получить из произвольной хорошей последовательности длины n − 2 приписыванием справа нуля и единицы. Поэтому имеется ровно  таких последовательностей.

Таким образом, при  имеет место рекуррентное соотношение . Отсюда получаем числа Фибоначчи:

.

Искомая вероятность равна доле хороших последовательностей длины 10 среди всех двоичных последовательностей этой длины .

**Задача 11.** (Всероссийский студенческий турнир математических боёв, организуемый Тульским педагогическим университетом им. Л.Н. Толстого, 2013)

Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и −1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.

*Решение:*

Рассмотрим n независимых случайных величин , принимающих значения −1 и 1 с вероятностью 1/2. Сумма членов этой последовательности есть случайная величина , а математическое ожидание её квадрата есть искомое среднее арифметическое. Имеем

; ; ; ;

**Задача 12.** (Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом, 2009 г)

В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там ещё есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?

*Решение:*

Пусть  — случайная величина, равная 1, если подарок из i-го ящика взят, и 0, если не взят. Очевидно:



Поэтому:



Мы нашли среднее число взятых подарков. Но число взятых подарков в нашей задаче совпадает с количеством детей, их получивших. Значит, без подарков уйдут в среднем  детей.

**Задача 13.** Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

*Решение:*

Пусть Ai — множество распределений подарков по ящикам, когда i-й ящик пуст, i = 1, 2, 3. Очевидно, что . Кроме того, и  при . Поэтому



Всего возможных распределений призов 35, искомая вероятность равна 93/35 = 31/81.

**Задача 14.** Среди вершин правильного (2n + 1)-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

*Решение:*

Зафиксируем одну из трёх выбранных точек. Обозначим её B. Следующие за ней по часовой стрелке точки обозначим . В качестве двух других вершин треугольника могут быть выбраны любые две из 2n точек. Всего возможных вариантов . Подсчитаем, в скольких случаях получится остроугольный треугольник. Ясно, что из групп точек  и  должно быть выбрано ровно по одной точке. Пусть из первой группы выбирается точка , а из второй — . При этом в треугольнике ­ углы при вершинах  ибудут острыми. Для того, чтобы был острым и угол при вершине B, необходимо и достаточно выполнение условия . При i = k индекс j может быть равен  — всего имеем k вариантов. Значит, общее число способов выбрать вершины  и равно

.

Осталось подсчитать искомую вероятность:



**Задача 15.** Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдётся маршрут, который в глазах путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы?

*Решение:*

Найдем вероятность того, что предпочтительного маршрута не окажется. Так как в нашем случае маршрут считается предпочтительным, если его выбрали 2 или 3 путешественника, то в случае отсутствия предпочтительного маршрута можно считать, что на первом месте каждый маршрут встречался по одному разу. Если при этом какой-то маршрут будет вторым в списках предпочтений путешественников дважды, то он (всякий раз по мнению двух из трёх) будет лучше каждого из двух других маршрутов. Таким образом, если выбор первого (a, b, c), то второй и третий должны в каком-то порядке выбрать (b, c, a) и (c, a, b). Вероятность этого . А вероятность противоположного события, которую и требуется найти в задаче, равна 17/18.

**Задача 16.** В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?

*Решение:*

Добавив два воображаемых бара, получим 10 баров, в каждом из которых бродяга оказывается с вероятностью 0,1. Известно, что в 7 «реальных» барах его не было. Из трёх оставшихся баров реален только один. Поэтому вероятность, с которой он окажется там, равна 1/3.

**Задача 17.** Из n вопросов, вынесенных на зачёт, студент выучил m вопросов (). Зачёт ставится, если студент ответит не менее чем на половину вопросов. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя?

*Решение:*

Вычислим вероятность  не сдать зачёт, если в билете k вопросов.

Пусть в билете два вопроса. Студент не сдаст зачёт, только если не ответит на оба вопроса. Поэтому

.

Если в билете четыре вопроса, зачёт не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один (любой из четырёх). Значит,



Найдем разность полученных вероятностей.



Если , то вероятность сдать зачёт больше, когда в билете два вопроса. Так будет, если. В случае равенства оба билета одинаково выгодны, при противоположном знаке выгоден билет с 4 вопросами.

**Задача 18.** В двух урнах лежит 25 шаров белого и чёрного цвета. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0,54. Найдите вероятность того, что они оба чёрные.

*Решение:*

Пусть в i-й урне  шаров, среди которых  белых, i = 1, 2. Тогда . Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства , . Одно из чисел  делится на 5, тем же свойством обладает и второе из них (так как их сумма равна 25). Пусть . Возможны два случая:

, . Тогда , причём , , так что , .

, . Тогда , причём , , так что 

В обоих случаях вероятность вынуть два черных шара равна .

**Задача 19.** Монету подбросили 10 раз. Найдите вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта не будет двух последовательных орлов.

*Решение:*

Результаты подбрасываний монеты запишем двоичной последовательностью, в которой 1 (0) на i-м месте означает, что при i-м броске выпал орёл (соответственно, решка). Назовём двоичную последовательность хорошей, если в ней нет двух соседних единиц. Пусть  — количество хороших последовательностей длины n. Очевидно, , .

Если хорошая последовательности из n символов оканчивается нулём, то её можно получить из произвольной хорошей последовательности длины n−1 приписыванием справа нуля. Значит, имеется ровно  таких последовательностей.

Если же хорошая последовательности из n символов оканчивается единицей, то её предпоследняя цифра — ноль, и эту последовательность можно получить из произвольной хорошей последовательности длины n − 2 приписыванием справа нуля и единицы. Поэтому имеется ровно  таких последовательностей.

Таким образом, при  имеет место рекуррентное соотношение . Отсюда получаем числа Фибоначчи:

.

Искомая вероятность равна доле хороших последовательностей длины 10 среди всех двоичных последовательностей этой длины .

**Задача 20.** Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и −1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.

*Решение:*

Рассмотрим n независимых случайных величин , принимающих значения −1 и 1 с вероятностью 1/2. Сумма членов этой последовательности есть случайная величина , а математическое ожидание её квадрата есть искомое среднее арифметическое. Имеем

; ; ; ;

**Задача 21.** В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там ещё есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?

*Решение:*

Пусть  — случайная величина, равная 1, если подарок из i-го ящика взят, и 0, если не взят. Очевидно:



Поэтому:



Мы нашли среднее число взятых подарков. Но число взятых подарков в нашей задаче совпадает с количеством детей, их получивших. Значит, без подарков уйдут в среднем  детей.

**Задача 22.** Число людей с положительным резус-фактором равно примерно 15%. Известно, что положительный резус-фактор рецессивен, т.е. проявляется, только если он получен и от матери, и от отца. Этот ген распределен одинаково у женщин и у мужчин. У женщины резус-фактор положителен. Какова вероятность того, что и у ее ребенка он будет положителен?

*Решение:*

Пусть p – вероятность того, что один из родителей передаст ребенку ген данного признака. Тогда вероятность его проявления равна . Значит, . В силу того, что мать в данном случае передает признак с вероятностью 1, искомая вероятность равна .

**Задача 23.** В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по ребрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что два муравья встретятся на одном ребре?

*Решение:*

Подсчитаем вероятность того, что муравьи не встретятся на ребрах. Муравей из вершины A может ползти в любую из 3 вершин (вероятность этого события равна 1). Назовем вершину, в которую он пополз, B. Муравей из этой вершины может ползти в любую из двух вершин, кроме A (вероятность события 2/3). Назовем выбранную им вершину C. Тогда C-муравей имеет выбор из двух вариантов.

1) С вероятностью 1/3 он ползет в вершину A. Тогда четвертый муравей из вершины D может ползти в любую из трех вершин.

2) С той же вероятностью 1/3 муравей ползет в вершину D. Тогда для D-муравья остается 2 пути (в A или в B).

Вероятность «невстречи» равна . Тогда вреоятность встречи составляет .

Муравьи из вершин A и B также могут встретиться на вершине C или D. Тогда случай 1 исключается, так как D-муравью некуда ползти. Во 2-м случае у него остается только путь в A. Вероятность «невстречи» составит , а вероятность встречи .

**Задача 24.** В соревновании в тире участвуют два спортсмена – «хладнокровный», для которого вероятность поражения мишени одиночным выстрелом постоянна и равна , и «эмоциональный», для которого вероятность поражения первой мишени равна , а вероятность каждого следующего выстрела зависит от предыдущего: в случае поражения мишени вероятность попадания увеличивается на , а в случае промаха – уменьшается на ту же величину. Найти значение , при котором ожидаемое количество пораженных мишеней в серии из 3 выстрелов для обоих спортсменов будет одинаковым?

*Решение:*

Очевидно, что для «хладнокровного» спортсмена ожидаемое количество пораженных мишеней будет равно .

Рассмотрим все возможные серии «эмоционального» спортсмена (1 – поражение мишени, 0 – промах) и их вероятности.

попадания:

3 попадания: 111: .

2 попадания: 110: .

101: .

011: .

1 попадание: 100: .

010: .

001: .

0 попаданий: 000: .

Подсчитаем ожидаемое количество пораженных мишеней.

.

После упрощений получим:

.

Из условия  получим . Получаем , причем  не зависит от .

Ответ: .

**Задача 25.** Накануне Летних Олимпийских Игр 2016 года в Рио-де-Жанейро Всемирное Антидопинговое Агентство решило проверить всех спортсменов на употребление запрещенного вещества – мельдония. Современные методы позволяют обнаружить мельдоний, даже если анализируется смесь проб у нескольких спортсменов. Поэтому, чтобы уменьшить количество проб и расходы на них, было предложено смешивать пробы  спортсменов, и если проба дала отрицательный результат, то все спортсмены допущены к соревнованиям. Если же результат допинг-пробы положительный, берется еще  проб у каждого спортсмена в отдельности. Найти оптимальную численность группы , если вероятность того, что спортсмен принимал мельдоний . Считать, что число спортсменов достаточно велико.

*Решение:*

Вероятность того, в группе из  спортсменов получится отрицательная проба равна . Тогда «функция экономии» будет  она имеет максимум при .

**Задача 26.** В урне находятся 10 белых и 3 черных шара. Трое игроков по очереди извлекают по одному шару, отмечают цвет и возвращают шар обратно. Выигрывает тот, кто первым извлечет черный шар. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков, если игра может продолжаться неограниченно.

*Решение:*

Вероятность вытащить черный шар равна , а вытащить белый – .

Очевидно, что до победы одного из игроков будут извлекаться только белые шары, а последний шар будет черным.

Для первого круга:

1-й игрок: .

2-й игрок: 

3-й игрок: 

Для второго круга:

1-й игрок: .

2-й игрок: 

3-й игрок:  и т.д.

Для -го круга:

1-й игрок: .

2-й игрок: 

3-й игрок: 

Вероятность победы 1-го игрока: .

Вероятность победы 2-го игрока: .

Вероятность победы 3-го игрока: .

Для  и  получим:

, , .

**Задача 27.** Студент Петров сдает экзамен по теории вероятностей доцентам Сидоровой и Ивановой. Вероятность сдать экзамен доцентам Сидоровой и Ивановой равны соответственно 0, 7 и 0,5. Вероятность того, что студенту Петрову придётся сдавать экзамен этим преподавателям равны. Петров экзамен не сдал. Найти вероятность, что он не сдал доценту Сидоровой.

*Решение:*

Пусть A – событие сдачи экзамена, вероятности  и — вероятности событий, заключающихся в том, что Петров будет сдавать экзамен каждому из доцентов – равны .Вероятность сдачи экзамена . Вероятность не сдать экзамен: . Тогда вероятность того, что студент не сдал экзамен доценту Сидоровой равна .

**Задача 28.** Разыгрывается лотерея. Что легче: угадать 5 номеров из 36 или 6 из 49?

*Решение:*



.

**Задача 29.** В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность того, что они пересекаются? (Точкой пересечения считается общая точка двух несовпадающих диагоналей, лежащая внутри многоугольника.)

*Решение:*

Число способов провести одну диагональ в 40 выпуклом n-угольнике равно . При фиксированном положении одной диагонали, вторую диагональ можно построить  способами. Поэтому число N возможных способов провести две различные диагонали равно



Число пересекающихся диагоналей равно числу сочетаний из n по 4, т.е.  , так как любые 4 вершины определяют пару пересекающихся диагоналей. Окончательно



# 6 Линейная алгебра

6.1 Основные понятия и термины

Со степенью матрицы связаны следующие определения, характеризующие её свойства. Квадратная матрица называется:

1. — идемпотентной;

2. — иволютивной;

3. — периодической;

4. — нильпотентной ( – нулевая матрица).

Со следом квадратной матрицы – связаны свойства:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. ;

Если и – столбцы размера , то и

Если – корни характеристического уравнения .

При решении многих задач с матрицами удобно переходить к блочным матрицам, т.е. к матрицам, разделенным на блоки (клетки). Это иногда позволяет избежать громоздких вычислений.

6.2 Задачи по теме «Линейная алгебра»

**Задание 1.** Найти чему равна матрица

*Решение:*

Заметим, что при умножении на данную матрицу справа правый верхний элемент левой матрицы складывается с левым верхним, а остальные остаются без изменений. Тогда легко посчитать, что:

…

**Задание 2.** Матрицы и таковы, что , и

Найти .

*Решение:*

Представим матрицы и в виде блочных матриц размера :

и .

Тогда

Откуда следует, что и .

Следовательно, .

Окончательно:

**Задание 3.**

Доказать, что, при справедливо неравенство

*Решение:*

Обозначим определитель через . Достаточно доказать, что .

Имеем:

Причём первое неравенство превращается в равенство только при , а тогда .

**Задание 4.** Пусть — невырожденная матрица порядка , . Доказать, что , где — число нулевых элементов в матрице.

*Решение:*

Пусть .

Тогда  *при*

А так как , то среди элементов -й строки матрицы есть по крайней мере два ненулевых. Следовательно, всего ненулевых элементов не менее чем и отсюда .

**Задание 5.** Пусть — квадратная матрица порядка определённая на интервале Известно, что для всех и для любой постоянной матрицы существует предел Доказать, что существуют пределыи  *.*

*Решение:*

Пусть , где — матрица, в которой на пересечении -й строки и -го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

где — алгебраическое дополнение элемента в Заметим, что выражение является суммой произведений вида , поэтому оно имеет предел при . Но , следовательно, существует предел .

# 7 Пределы

7.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим основные теоремы и теорию:

1. **Асимптотика частичных сумм гармонического ряда.**

где - постоянная Эйлера.

2. **Асимптотика сумм.**

Если функция монотонна на

то

3. **Теорема Коши.**

в предположении, что существует предел (конечный или бесконечный) в левой части этого равенства.

4. **Теорема Штольца.**

Пусть и начиная с некоторого номера Тогда

в предположении, что существует предел (конечный или бесконечный) в левой части этого равенства.

Пусть Тогда

в предположении, что существует предел (конечный или бесконечный) в левой части этого равенства.

Пусть . Тогда

в предположении, что существует предел (конечный или бесконечный) в левой части этого равенства.

5. **Теорема Вейерштрасса.**

Пусть . Для любого существует такой алгебраический полином , что при всех

Этой теореме можно придать и другую формулировку: для любой непрерывной на отрезке функции существует последовательность алгебраических полиномов , равномерно сходящаяся на к .

6. **Теорема Арцела** о предельном переходе под знаком интеграла. Пусть дана последовательность функций , , интегрируемых (в собственном смысле) на отрезке и равномерно ограниченных

где - константа, не зависящая от и . Если для всех из существует предел

и функция также интегрируема, то

Непрерывные дроби и их сходимость.

Цепной или непрерывной дробью называется следующее выражение

где и – последовательности вещественных или комплексных чисел. Рассмотрим конечную дробь вида

Цепная дробь, у которой предел

существует и конечен называется сходящейся. Значение цепной дроби принимается равным этому пределу. В противном случае, цепная дробь называется расходящейся. Если , , то существует простое необходимое и достаточное условие сходимости непрерывной дроби:

7. **Теорема Зейделя.** Для сходимости непрерывной дроби где необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

Регулярные преобразования и теорема Теплица-Шура.

Рассмотрим преобразование бесконечной вещественной последовательности , определяемое формулой

Таким образом, преобразование определяется бесконечной матрицей с элементами .

*Определение.* Преобразование называется регулярным, если последовательность определена при всех , и из всегда следует .

**Теорема.** Для регулярности преобразования необходимо и достаточно выполнение следующих трёх условий:

Условия 2 и 3 означают, что исходный ряд сходится заведомо неравномерно по параметру . Отметим, что для решения олимпиадных задач обычно используется лишь достаточность условий этой теоремы. Многие классические теоремы о пределах (такие, например, как теоремы Коши и Штольца) могут быть получены из теоремы Теплица-Шура.

7.1 Задачи по теме «Пределы»

**Задание 1.** Найти если

*Решение:*

Выражение в скобках представляет из себя замечательный предел и стремиться к . Поэтому

Откуда очевидно, что .

**Задание 2.** Пусть *.* Доказать, что существует и найти его.

*Решение:*

Очевидно, что возрастает. По индукции доказывается, что . Тогда имеет предел, который можно найти, переходя к пределу в рекуррентном соотношении и учитывая, что . Ответ:

**Задание 3.** Вычислить предел .

*Решение:*

Заметим, что

и

Обе крайние последовательности, очевидно, стремятся к , поэтому по теореме о сжатой последовательности таким же будет и искомый предел.

**Задание 4.** Пусть Найти предел последовательности

*Решение:*

Для любого , найдётся такое , что при . Фиксируя такое , имеем

где через обозначена сумма сходящегося ряда

При фиксированном , выберем настолько большим, чтобы первая конечная сумма была меньше . Тогда получим

начиная с достаточно большого номера . В силу произвольности это означает, что при .

**Рассмотрим одну задачу из олимпиад Московского Политеха.**

Вычислить предел .

*Решение:*

Были использованы формулы и .

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ипатова, В. М., Пыркова, О. А., Седов, В. Н. И76 Дифференциальные уравнения. Методы решений: учеб. пособие / В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. – 140 с

2. Попов И.Ю. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики/ Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. 214 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 2001.

4. В. А. Амбарцумян, Е. А. Андрющенко, К. В. Бухенский, Е. А. Дворецкова, А. Б. Дюбуа Студенческие математические олимпиады 2014

5. С.П. Коновалов, М.В. Балашов Олимпиады МФТИ 2007

6. Ипатова, В. М., Пыркова, О. А., Седов, В. Н. И76 Дифференциальные уравнения. Методы решений: учеб. пособие / В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

8. С.П. Коновалов, М.В. Балашов Олимпиады МФТИ 2007

9. Электронный ресурс 2022 URL: [https://www.matburo.ru/ex\_dm.php? p1=dmmmi](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?%20p1=dmmmi)

10. Электронный ресурс 2022 URL: [http://intelmath.narod.ru/Sev-2005.html](https://vk.com/away.php?to=http%3A%2F%2Fintelmath.narod.ru%2FSev-2005.html&cc_key=)

11. Электронный ресурс 2022 URL: [https://kpfu.ru/docs/F1021260618/ TViMS.pdf](https://kpfu.ru/docs/F1021260618/%20TViMS.pdf)

12. Электронный ресурс 2022 URL: <https://berkov.mozellosite.com/>

13. Электронный ресурс 2022 URL: https://www.matburo.ru /tvbook\_sub.php?p=par13#z2